# Grado en Biotecnología
## Ejercicios resueltos del examen de Análisis Matemático 19/01/18

1. a) Prueba, usando el teorema de Bolzano que la ecuación

$$2x^2 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{2} = 0$$

tiene al menos dos soluciones reales.

b) Prueba, usando el teorema de Rolle, que dicha ecuación no puede tener más de dos soluciones reales.

**Solución.** a) Definimos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $f(x) = 2x^2 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{2}$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Es *una función continua y está definida en un intervalo*, por lo que podemos aplicar el teorema de Bolzano que nos dice que dicha función debe anularse ***al menos una vez*** entre cada dos puntos en los que cambie de signo. Como $f(-1) = 3 - 1/2 = 5/2 > 0$, $f(0) = -1/2 < 0$ y $f(1) = 2 - 1 - 1/2 = 1/2 > 0$, deducimos que en cada uno de los intervalos $]-1,0[$ y $]0,1[$ la función se anula ***al menos una vez***. Hemos probado así que la ecuación del enunciado tiene ***al menos*** dos soluciones.

b) Como consecuencia del teorema de Rolle, si la derivada de una función se anula en exactamente $k$ puntos la función puede anularse ***como máximo*** en $k+1$ puntos. Tenemos que:

$$f'(x) = 4x - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), \qquad f''(x) = 4 + \frac{\pi^2}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \geqslant 4 - \frac{\pi^2}{4} = \frac{16-\pi^2}{4} > 0$$

Como la derivada segunda, $f''$, no se anula, la derivada primera, $f'$, puede anularse ***como máximo*** una vez, y la función, $f$, puede anularse ***como máximo*** dos veces.

Por lo visto en a) y en b) concluimos que la ecuación del enunciado tiene ***exactamente*** dos soluciones reales. ☺

**Comentarios.** Hemos hecho en clase y en las relaciones de ejercicios al menos media docena de ejercicios como este. Suponía que todos lo haríais bien. Me equivoqué. Algunos afirman ¡sin calcular la derivada segunda! que la derivada primera es estrictamente creciente o que se anula en un único punto. Pues eso es verdad pero la forma de probarlo es comprobando que la derivada segunda siempre es positiva. Dar por cierto lo que hay que probar sin ni siquiera intentar probarlo da muy mala impresión. Otros se equivocan al calcular las derivadas. Hay quien afirma que la derivada tercera $f'''(x) = \frac{\pi^3}{8}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) > 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$ y se queda tan contento. ☹

2.

Se quiere construir un depósito para gas de forma cilíndrica rematado en sus extremos por dos semiesferas cuyo volumen sea igual a $10\pi$ metros cúbicos. El coste por metro cuadrado de las semiesferas es doble al de la parte cilíndrica. Calcular las dimensiones del depósito para que el coste sea mínimo. Justifica que se trata de un mínimo absoluto.

**Solución.** Sea $h$ la altura del cilindro y $r$ el radio que suponemos expresados en metros. Tenemos que

$$\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 10\pi \Longrightarrow h = \frac{30-4r^3}{3r^2}$$

Sea $c$ el coste en euros por metro cuadrado del depósito. El coste total en euros será $2\pi rhc + 4\pi r^2(2c) = 2c\pi(rh + 4r^2)$. Por tanto, la función que hay que hacer mínima es

$$f(r) = rh + 4r^2 = r\frac{30 - 4r^3}{3r^2} + 4r^2 = \frac{30 + 8r^3}{3r} = \frac{10}{r} + \frac{8}{3}r$$

función que está definida en $\mathbb{R}^+$ pues debe ser $r > 0$. Tenemos que

$$f'(r) = -\frac{10}{r^2} + \frac{16}{3}r = \frac{16r^3 - 30}{3r^2}$$

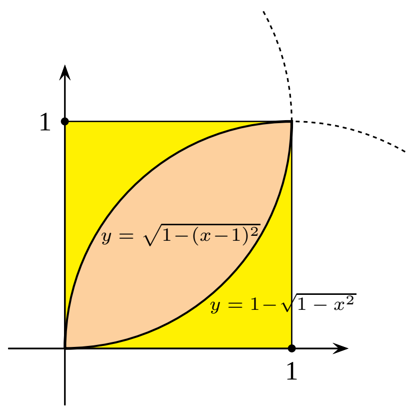
Es inmediato comprobar que el único valor de $r$ que anula a la derivada es $r_0 = \frac{\sqrt[3]{15}}{2}$. Además, tenemos que:

$$\begin{array}{lllllllll} 0 < r < r_0 & \Rightarrow & 16r^3 - 30 < 16r_0^3 - 30 = 0 & \Rightarrow & f'(r) < 0 & \Rightarrow & f \downdownarrows \text{ en } ]0, r_0] & \Rightarrow & f(r) > f(r_0) \\ r > r_0 & \Rightarrow & 16r^3 - 30 > 16r_0^3 - 30 = 0 & \Rightarrow & f'(r) > 0 & \Rightarrow & f \upuparrows \text{ en } [r_0, +\infty[ & \Rightarrow & f(r) > f(r_0) \end{array}$$

Por tanto $f$ alcanza en $r_0$ un mínimo absoluto. ☺

**Comentarios.**Hemos hecho en clase muchos ejercicios parecidos a este. Es un ejercicio típico de optimización en el que los cálculos que hay que hacer son muy sencillos. Eso creía yo pero me equivoqué porque no valoré lo suficiente vuestra capacidad para cometer errores básicos al despejar, al derivar una función tan sencilla o al resolver una ecuación. Esos errores son absolutamente inadmisibles en estudiantes universitarios. Hay quien no sabe calcular el área lateral de un cilindro ¡y se la inventa!. Muy pocos comprueban que se trata de un mínimo absoluto. La mayoría se limitan a afirmar lo que ya saben que tiene que pasar pero, de hecho, no comprueban nada. Eso da muy mala impresión, es pasarse de listillos: *como en $r_0$ tiene que haber un mínimo absoluto porque el ejercicio así lo dice, entonces la derivada a la izquierda de $r_0$ tiene que ser negativa y a la derecha de $r_0$ tiene que ser positiva*. ¡Hala, ya está! Pues no, eso no cuela. Si te piden comprobar que es un mínimo absoluto tienes que hacerlo de forma convincente, no de cualquier manera. En estos ejercicios es fundamental indicar dónde está definida la función que se optimiza. Algunos siguen sin saber la diferencia entre un extremo relativo y uno absoluto. ☹

3. Calcula el área de la intersección de los círculos centrados en $(0, 1)$ y $(1, 0)$ y de radio 1. Calcula, por el método de los discos o arandelas y por el método de las tubos o de las capas, el volumen del sólido engendrado al girar dicha región alrededor del eje de abscisas.




**Solución.** Se trata de una región de tipo I, la curva que la limita por arriba es $f(x) = \sqrt{1 - (x-1)^2}$ y la curva que la limita por abajo es $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$. El área viene dada por:

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = -1 + \int_0^1 \sqrt{1 - (x-1)^2}\,dx + \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = -1 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Sin más que tener en cuenta que las integrales, en cada caso, representan el área de la cuarta parte de un círculo de radio 1.

Para calcular el volumen por el método de los discos o arandelas lo que hacemos es girar segmentos perpendiculares al eje de giro. Teniendo en cuenta que el radio exterior de giro es $f(x)$ y el radio interior de giro es $g(x)$, el volumen viene dado por

$$V = \pi \int_0^1 (f(x)^2 - g(x)^2)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 2(x-1)\,\mathrm{d}x + 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\pi + \frac{\pi^2}{2}$$

Para calcular el volumen por el método de las láminas o tubos lo que hacemos es girar segmentos paralelos al eje de giro. Para calcular la longitud de tales segmentos expresamos $x$ en función de $y$ en las ecuaciones $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$ e $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$ y obtenemos que $x = 1 - \sqrt{1-y^2}$ y $x = \sqrt{1-(y-1)^2}$. El radio de giro de cada segmento es el valor de la ordenada $y$, por tanto el volumen viene dado por

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^1 y\big(\sqrt{1-(y-1)^2} - (1 - \sqrt{1-y^2})\big)\,\mathrm{d}y = \\
&= 2\pi \int_0^1 y\sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y - 2\pi \int_0^1 y\,\mathrm{d}y + 2\pi \int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y = \\
&= 2\pi \int_0^1 (y-1)\sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y + 2\pi \int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y + 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y - \pi = \\
&= 2\pi \int_0^1 (y-1)\sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y + 2\pi \int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y + \frac{\pi^2}{2} - \pi = \\
&= 2\pi \left[\frac{-1}{3}(1-(y-1)^2)^{3/2}\right]_0^1 + 2\pi \left[\frac{-1}{3}(1-y^2)^{3/2}\right]_0^1 + \frac{\pi^2}{2} - \pi = \frac{\pi^2}{2} - \pi
\end{aligned}$$

**Comentarios.** Hemos hecho ejercicios muy parecidos en clase. De hecho, la mayoría de los cálculos con integrales que hemos realizado están relacionados con círculos. Es lícito reconocer que una integral representa un área conocida, como yo he hecho al resolver el ejercicio para evitar cálculos innecesarios, pero si no caes en ello tampoco pasa nada porque las primitivas que hay que calcular son bien conocidas ya que han aparecido en muchas ocasiones. Me refiero, claro está, a las primitivas

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int y\sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y$$

La primera debes saber calcularla, y la segunda haciendo $y - 1 = t$ se reduce a la primera y a otra inmediata.

El error más generalizado en este ejercicio ha sido al expresar $y$ en función de $x$. Toda circunferencia tiene dos mitades: la superior y la inferior y es importante saber cuál de ellas queremos representar. En nuestro caso, está claro que debemos representar la parte inferior de la circunferencia $x^2 + (y-1)^2 = 1$ y la superior de la $(x-1)^2 + y^2 = 1$, lo que lleva a las funciones antes consideradas. Muchos habéis tomado $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$ lo que es incorrecto ¡está claro que tiene que ser $0 \leqslant y \leqslant 1$! También habéis tomado $x = 1 + \sqrt{1-y^2}$ lo que es incorrecto ¡está claro que tiene que ser $0 \leqslant x \leqslant 1$! Otro error es usar la fórmula

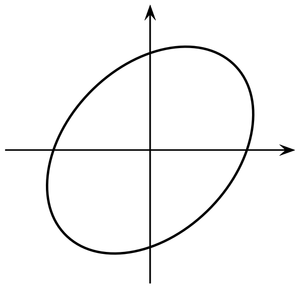
$$\pi \int_0^1 (f(x) - g(x))^2\,\mathrm{d}x$$

para calcular el volumen por el método de los discos. Eso es incorrecto ¿habrá que recordar que $(f(x) - g(x))^2 \neq f(x)^2 - g(x)^2$?. Bastantes de vosotros obtienen valores negativos para el área o el volumen y se quedan tan contentos o, lo que es peor, hacen trampa y los cambian porque sí. Muy pocos habéis hecho bien este sencillo ejercicio. ☹

4. La ecuación

$$13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0$$

representa una elipse centrada en el origen que se ha sometido a un giro. Calcula las longitudes de los ejes de dicha elipse.



**Solución.** La distancia de un punto $(x, y)$ al origen es $\sqrt{x^2 + y^2}$ (¡algunos no lo saben!). Por tanto, se trata de calcular los puntos de la elipse que dan máxima y mínima distancia al origen. Es un ejercicio típico de extremos condicionados: calcular los extremos absolutos de $\sqrt{x^2 + y^2}$ cuando las variables $x$ e $y$ verifican que $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0$. Podemos prescindir de la raíz cuadrada para mayor comodidad en los cálculos. Se trata, pues, de calcular los extremos absolutos del campo escalar $f(x, y) = x^2 + y^2$ con la restricción dada por $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0$. Observa que como la curva $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0$ es un conjunto cerrado y acotado, es decir, es un conjunto compacto, el teorema de Weierstrass asegura que existen dichos extremos absolutos, y sabemos que los mismos deben ser puntos críticos de la función de Lagrange. Calcularemos los puntos críticos de la función de Lagrange:

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72)$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) &= 2x + \lambda(26x - 10y) = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \lambda) &= 2y + \lambda(26y - 10x) = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) &= 13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0
\end{aligned}$$

Este sistema puede resolverse de muchas formas. Podemos despejar $\lambda$ en las dos primeras ecuaciones:

$$\lambda = \frac{x}{13x - 5y} = \frac{y}{13y - 5x} \Longrightarrow x(13y - 5x) = y(13x - 5y) \Longrightarrow x^2 = y^2 \Longrightarrow y = \pm x$$

Si $y = x$, sustituyendo en la tercera ecuación obtenemos $16x^2 = 72$ de donde $x = \pm 3/\sqrt{2}$.

Si $y = -x$, sustituyendo en la tercera ecuación obtenemos $36x^2 = 72$ de donde $x = \pm\sqrt{2}$.

Hemos obtenido así las soluciones $\pm(3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$ y $\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ que deben ser los puntos donde se alcanzan las distancias máxima y mínima al centro de la elipse. Tenemos así que las longitudes de los ejes son $2\sqrt{f(3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})} = 2\sqrt{9} = 6$ y $2\sqrt{f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})} = 2\sqrt{4} = 4$. ☺

**Comentarios.** Muchos ni siquiera habéis entendido el ejercicio. En clase hicimos un ejercicio, más complicado, en el que calculamos la distancia mínima entre una recta y una elipse. Llama la atención que muchos no sepáis calcular la distancia entre dos puntos del plano.

El sistema puede resolverse de muchas formas. Por ejemplo, si restamos las dos primeras ecuaciones resulta $(x - y)(1 + 18\lambda) = 0$. Por tanto $y = x$, lo que lleva a las soluciones $y = x = \pm 3/\sqrt{2}$, o $\lambda = -1/18$ que, sustituido en la primera ecuación, lleva a $y = -x$ lo que proporciona la soluciones $x = -y = \pm\sqrt{2}$.

Otra forma. Multiplicamos la primera ecuación por $y$, la segunda por $x$ y despejamos $2xy/\lambda$ en ambas ecuaciones para obtener que:

$$\frac{2xy}{\lambda} = 10y^2 - 26xy = 10x^2 - 26xy$$

lo que implica que $x^2 = y^2$ y volvemos a obtener fácilmente las soluciones.

Observación para nota: no hay soluciones con $x = 0$, pues en tal caso la tercera ecuación implica que $y \neq 0$, y para que se cumpla la primera ecuación debe ser $\lambda = 0$, en cuyo caso no se cumple la segunda ecuación. Tampoco puede haber soluciones con $y = 0$. Deducimos que debe ser $26x - 10y \neq 0$ y $26y - 10x \neq 0$ y $\lambda \neq 0$.

Llama la atención que aunque *es evidente* que hay cuatro soluciones algunos calculan solamente dos y se quedan tan contentos. ¿No está claro en que el enunciado se piden las longitudes de *los* ejes de la elipse? Y una elipse tiene *dos* ejes.

¡Algunos creen que la función que hay que optimizar es la que representa a la elipse! Otros usan la matriz hesiana. Muchos olvidáis calcular el área. Este ejercicio es un regalito. Pocos, muy pocos, lo habéis hecho bien. ☹

5. Calcula la integral doble

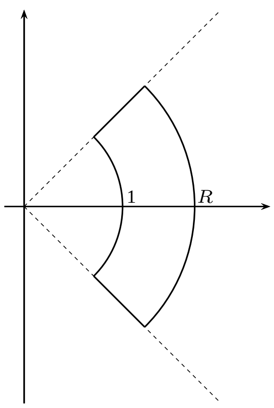
$$I(R) = \iint\limits_{A(R)} \frac{1}{(2x^2+y^2)(1+x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y)$$

Donde

$$A(R) = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y| \leqslant x,\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant R^2\right\}$$

Calcula $\lim\limits_{R\to+\infty} I(R)$.

**Solución.** La región $A(R)$ es fácil de representar. La condición $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant R^2$ la cumplen los puntos $(x,y)$ del plano cuya distancia al origen es mayor o igual que 1 y menor o igual que $R$. La condición $|y| \leqslant x$ nos dice que $x \geqslant 0$ y, para cada valor de $x$ se tiene que $-x \leqslant y \leqslant x$, es decir, la condición $|y| \leqslant x$ es la región del semiplano de la derecha ($x \geqslant 0$) que queda comprendida entre las rectas $y = x$ e $y = -x$.




Expresando la integral en coordenadas polares, tenemos:

$$I(R) = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\int\limits_1^R \frac{\rho}{(2\rho^2\cos^2\vartheta+\rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta)(1+\rho^2)}\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\vartheta = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\cos^2\vartheta+\operatorname{sen}^2\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta \int\limits_1^R \frac{1}{\rho(1+\rho^2)}\,\mathrm{d}\rho$$

Se trata de calcular estas dos integrales. La primera es una integral trigonométrica par que se racionaliza y calcula muy fácilmente con el cambio $\operatorname{tg}\vartheta = t$:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta = \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg}\vartheta, \ \ \mathrm{d}\vartheta = \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ \cos^2 t = \dfrac{1}{1+t^2} \\ \vartheta = \dfrac{\pi}{4} \to t = 1, \ \vartheta = -\dfrac{\pi}{4} \to t = -1 \end{bmatrix} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2+t^2}\,\mathrm{d}t = $$

$$= \sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}(1/\sqrt{2})$$

La segunda es una integral racional que se calcula de la forma usual:

$$\frac{1}{\rho(1+\rho^2)} = \frac{A}{\rho} + \frac{B\rho + C}{1+\rho^2} \Longrightarrow A = 1, B = -1, C = 0$$

con lo que fácilmente se obtiene

$$\int_{1}^{R} \frac{1}{\rho(1+\rho^2)}\,\mathrm{d}\rho = \ln(R) - \frac{1}{2}\ln(1+R^2) + \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\left(\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}\right) + \frac{1}{2}\ln 2$$

Por tanto

$$I(R) = \sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}(\frac{1}{\sqrt{2}})\left(\ln\left(\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}\right) + \frac{1}{2}\ln 2\right) \Longrightarrow \lim_{R\to+\infty} I(R) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(\frac{1}{\sqrt{2}})\ln 2$$

☺

**Comentarios.** Muy pocos habéis hecho este sencilla integral doble muy parecida a otras que hemos hecho en clase. Muchos ni siquiera representan correctamente el conjunto $A(R)$. Tampoco es imprescindible porque, como debes saber

$$\iint_{A(R)} \frac{1}{(2x^2+y^2)(1+x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y) = \iint_{B(R)} \frac{\rho}{(2\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta)(1+\rho^2)}\,\mathrm{d}(\rho,\vartheta)$$

donde

$$\begin{aligned} B(R) &= \big\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi] : (\rho\cos\vartheta, \rho\operatorname{sen}\vartheta) \in A(R)\big\} = \\ &= \big\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi] : 1 \leqslant \rho^2 \leqslant R^2, |\operatorname{sen}\vartheta| \leqslant \cos\vartheta\big\} = \\ &= \big\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi] : 1 \leqslant \rho \leqslant R, -1 \leqslant \operatorname{tg}\vartheta \leqslant 1, \ \cos\vartheta \geqslant 0\big\} = \\ &= \big\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi] : 1 \leqslant \rho \leqslant R, -\pi/4 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/4\big\} = [1,R]\times[-\pi/4,\pi/4] \end{aligned}$$

Por tanto

$$\iint_{B(R)} \frac{\rho}{(2\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta)(1+\rho^2)}\,\mathrm{d}(\rho,\vartheta) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_{1}^{R} \frac{\rho}{(2\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta)(1+\rho^2)}\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\vartheta$$